**Методические рекомендации по подготовке учащихся к решению задач №9, №13 КИМ ЕГЭ (профильный уровень).**

Поскольку по окончании 11 класса учащимся предстоит сдавать единый государственный экзамен (ЕГЭ), и КИМ ЕГЭ по математике содержат в том числе и тригонометрические задания, то целесообразно провести 3-4 урока повторения по тригонометрии.

Как правило, №9, №13 КИМ ЕГЭ включают в себя задачи по тригонометрии (№9: требуется выполнить вычисления, основанные на тригонометрических формулах; №13: требуется решить тригонометрическое уравнение с последующим отбором корней), кроме того уделяется больше внимания заданиям, в которых нужно определить знак той или иной тригонометрической функции.

 Поэтому важно выполнять с учащимися упражнения на числовой окружности, повторить основное тригонометрическое тождество, тригонометрические формулы (формулы двойного аргумента, формулы приведения,..), выполнить с учащимися соответствующие упражнения на определение знака тригонометрической функции. Важно с учащимися разобрать решение основных типов тригонометрических уравнений, встречающихся в ЕГЭ (однородные уравнения 2-го порядка, тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим,..). Так как в задаче №13 необходимо осуществить отбор корней, и это требование предъявляется либо в виде промежутка, либо в виде простейшего тригонометрического неравенства, либо в виде ОДЗ, то целесообразно вспомнить с учащимися решение простейших тригонометрических неравенств, вспомнить, как отмечать промежуток на числовой окружности. Учащимся можно предложить 3 способа отбора корней, каждый из них может выбрать наиболее удобный для себя способ.

 В связи с вышесказанным, первый урок будет посвящен работе с числовой окружностью, на втором уроке будет проходить повторение основного тригонометрического тождества, основных тригонометрических формул, решение заданий №9; на третьем и четвертом – решение тригонометрических уравнений, отбор корней.

**Урок «Числовая окружность»**

***Образовательные цели урока:***

- обобщить имеющиеся у учащихся знания о числовой окружности как о самостоятельном объекте изучения.

- вспомнить основные принципы работы в двух системах координат - в криволинейной и прямоугольной декартовой.

***Ход основной части урока.***

Данный урок может быть построен в форме упражнений, предлагаемых Мордковичем А.Г. и беседы учителя и учащихся (репродуктивный, частично-поисковый методы)

Перед тем, как выполнить данные упражнения, необходимо начертить на доске 3 макета (или показать слайды с 3 макетами заранее подготовленной презентации):

1 макет: поделим числовую окружность на четверти и найдем числа, соответствующие точкам;

2 макет: разделим четверти еще раз пополам и найдем числа, соответствующие точкам;

3 макет: разделим четверти на 3 части и найдем числа, соответствующие точкам.

В ходе урока учащимся могут быть заданы вопросы:

1. На числовой окружности числа 0 и $2π$ совпадают. Значит ли это, что они равны? (*на самом деле, окружность имеет много витков*)
2. А можно дальше продолжить эту спираль?
3. Какие точки будут на втором витке?

Точка бежит по окружности и останавливается на втором витке напротив числа $\frac{π}{4}$.

Какое число соответствует данной точке? ($\frac{π}{4}+2π=\frac{9π}{4}$)

*Обобщаем, что одной точке на числовой окружности соответствует бесконечно много чисел, отличающихся друг от друга на* $2π$*.*

1. Почему мы движемся против часовой стрелки? (*направление движения против часовой стрелки принято считать положительным, а направление движения по часовой стрелки – отрицательным*)
2. Можно ли отметить числа 1, 2, 3,.. на числовой окружности? ($π≈3, 14)$

В ходе урока можно учащихся выборочно вызывать к доске (таким образом учащиеся будут стараться выполнять все задания и будет активизировано внимание класса) или разделить класс на микрогруппы, от задания к заданию к доске должны будут выходить разные представители, для того чтобы все учащиеся были вовлечены в учебный процесс.

Упражнения:

1. Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует

 заданному числу $α$, если $α$ = $π$, - $π$/2, $π$/3, -5$π$, 25$π$/4, $-26π/3, π/8, 6, $1,

 -5, 13.

 2. Что вы можете сказать о взаимном расположении точек,

 соответствующих заданным числам, на координатной прямой и на

 числовой окружности:

1. t и –t;
2. $t и t+2πk, kϵZ; $
3. $t и t+π;$
4. $t+π и t-π$?

(*t и –t симметричны относительно оси Ox, t откладываем против часовой стрелки, –t – по часовой стрелке;* $числа t и t+2πk, kϵZ$ *соответствуют одной и той же точке числовой окружности;* $числа $$t+π и t-π$ *соответствуют одной и той же точке на числовой окружности*)

 3. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка,

 соответствующая числу:

1. 6; 2) 2; 3) 10; 4) 8 (*6 принадлежит четвертой четверти, 2 – второй, 10 – третьей, 8 – второй*)

4. Центр числовой окружности совпадает с началом координат на

 координатной плоскости xOy. Найдите декартовы координаты

 заданной точки:

1. M($π/4)$; M($π/3); $M($π/6); $M($π/2)$;
2. M($15π/4)$; M($16π/3); $M($-31π/4); $M($-26π/3)$.

 5. Найдите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное

числа, которым на числовой окружности соответствует точка с

координатами:

M ($\sqrt{3}$/2; 1/2); M ($-\sqrt{3}$/2; 1/2); M ($\sqrt{3}$/2; $-$1/2); M ($-\sqrt{3}$/2; $-$1/2).

 6. Найдите на числовой окружности точки с данной ординатой и

запишите, каким числам t они соответствуют:

$y$=$\sqrt{2}$/2; $y$ =1/2; $y$ =0; $y$ =$\sqrt{3}$/2.

(найдите на числовой окружности точки с данной абсциссой и

запишите, каким числам t они соответствуют: $x$=$\sqrt{3}$/2, $x$ =1/2; $x$ =1;

$x$ =$\sqrt{2}$/2)

 7. Найдите на числовой окружности точки с абсциссой или ординатой,

 удовлетворяющей заданному неравенству, и запишите (с помощью

 двойного неравенства), каким числам t они соответствуют:

1. $x<$1/2; 2) $x>$1/2; 3) $y<$1/2; 4) $y>$1/2.

**Урок «Подготовка к ЕГЭ. Решение задач №9»**

***Образовательные цели урока:***

- вспомнить основные тригонометрические тождества, основные тригонометрические формулы, обобщить имеющиеся знания по их применению;

- уметь применять тригонометрические формулы к решению задач B7;

- уметь определять знаки тригонометрических функций на заданном промежутке.

***Ход основной части урока.***

Перед тем как приступить к выполнению заданий, учащимся можно предложить выйти к доске и записать основные тригонометрические формулы, тригонометрические тождества, среди них должны быть: основные тригонометрические тождества, формулы двойного угла, формулы сложения, формулы приведения, вспомнить при каких значениях аргумента тригонометрические функции принимают положительные (отрицательные) значения (с этой целью может быть использован макет), вспомнить четность (нечетность) тригонометрических функций.

Формулы приведения могут быть проиллюстрированы учителем на числовой окружности, что поможет учащимся в том случае, если они забудут мнемоническое правило. Можно попросить учащихся озвучить это правило и привести примеры (или сам учитель предлагает несколько примеров: $\sin(\left(\frac{3π}{2}+α\right)), tg\left(π+α\right),\cos(\left(\frac{π}{2} –α\right)),…$).

Учащимся целесообразно предложить применить формулы двойного аргумента к $sin4α, sinα, sin\frac{α}{2}, sin8α, cos4α, cosα, cos\frac{α}{2},cos8α$,.. (напрямую) и к выражениям вида 2$ sin15^{°}cos15^{°}$, $cos^{2}15^{°}-sin^{2}15^{°},$ $sin17^{°}cos17^{°},..$(в обратную сторону), показать удобство их применения к некоторым вычислениям. Например, нет табличных значений $sin15^{°}$ и $cos15^{°}$, но, зная и умея применять формулы двойного аргумента, легко вычислить 2$ sin15^{°}cos15^{°}= sin30^{°}=0,5.$

Можно попросить учащихся выразить синус или косинус из основного тригонометрического тождества, тем самым показав, что не обязательно запоминать выражение функции синус через функцию косинус (и наоборот).

Не обязательно запоминать все 3 формулы: $cos2x=cos^{2}x-sin^{2}x=1-2sin^{2}x=2cos^{2}x-1$, достаточно запомнить формулу $cos2x=cos^{2}x-sin^{2}x$ и основное тригонометрическое тождество $cos^{2}x+sin^{2}x=1$, из которого можно выразить $cos^{2}x$, $sin^{2}x$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся задания под номером B7.

Возможно их условное разделение на 5 групп:

1. Вычислить (или найти значение выражения):

$$36\sqrt{6}tg\frac{π}{6}sin\frac{π}{4};4\sqrt{2}cos\frac{π}{4}cos\frac{7π}{3}; \frac{8}{sin⁡(\frac{-27π}{4})cos⁡(\frac{31π}{4})}; -4\sqrt{3}\cos(\left(-750°\right));…$$

При выполнении таких заданий учащимся не нужно преобразовывать выражение, а необходимо подставить конкретные табличные значения тригонометрических функций и вычислить получившееся численное выражение, учащимся достаточно запомнить значения тригонометрических функций для аргумента $α:0<α<90°$, уметь отмечать точки на числовой окружности, соответствующие тому или иному значению аргумента, помнить и понимать определения синуса и косинуса (синус – ордината, косинус – абсцисса).

Если у учащихся не возникли затруднения во время первого урока, то маловероятно, что они возникнут при решении таких примеров.

1. Вычислить:

$$\frac{12sin11°∙cos11°}{sin22°}; \frac{24(sin^{2}17°-cos^{2}17°)}{cos34°};\frac{10sin6α}{3cos3α};…$$

 Для выполнения такого типа упражнений необходимо уметь применять формулы двойного аргумента.

1. Вычислить:

$$\frac{5cos29°}{sin61°};\frac{4cos146°}{cos34°};\frac{5tg163°}{tg17°};$$

$$5tg17°∙ctg107°; \frac{3\cos(\left(π-β\right))+\sin(\left(\frac{π}{2}+β\right))}{\cos(\left(β+3π\right))};$$

$$\frac{2\sin(\left(α-7π\right))+cos⁡(\frac{3π}{2}+α)}{sin⁡(α+π)};…$$

Для выполнения заданий такого типа от учащихся требуется умение применять формулы приведения (с помощью мнемонического правила, числовой окружности) и некоторая догадка.

Особенность первых четырех примеров в том, что нужно аргумент одной из тригонометрических функций представить в виде суммы (разности) $\frac{π}{2}n (nϵZ)$ и некоторого угла $α:0<α<90°$, который, как правило, является аргументом другой функции, применить формулу приведения и выполнить соответствующие преобразования.

1. Найдите $tgα$, если $cosα=\frac{1}{\sqrt{10}} и αϵ(\frac{3π}{2};2π)$;

Найдите $3cosα$, если $sinα=\frac{-2\sqrt{2}}{3} и αϵ(\frac{3π}{2};2π)$;

Найдите $24cos2α$, если $sinα=-0,2$(можно учащимся задать вопрос, почему не указан промежуток в данном примере);

Найдите $26cos⁡(\frac{3π}{2}+α)$, если $cosα=\frac{12}{13}$ и $αϵ(\frac{3π}{2};2π)$;..

Особенность таких примеров в том, что необходимо выразить синус (как правило, аргумента$ α)$ через косинус того же аргумента или наоборот; важно, чтобы учащиеся понимали, для чего дан промежуток, которому принадлежит угол $α$ (для определения знака тригонометрической функции, поскольку $sinα=\pm \sqrt{1-cos^{2}α }, cosα=\pm \sqrt{1-sin^{2}α }$), в некоторых примерах требуется сначала преобразовать выражение.

1. Найдите $tg^{2}α$, если $5sin^{2}α $+13$cos^{2}α=6.$

Здесь учащимся важно показать, что 1 можно заменить на выражение $sin^{2}α+cos^{2}α$ , тогда 6 в данном примере можно представить как $6sin^{2}α+6cos^{2}α$, после преобразований получим равенство 7$cos^{2}α-sin^{2}α=0$, затем разделим обе части равенства на $cos^{2}α$ (учащихся можно спросить, для чего целесообразно разделить равенство на $cos^{2}α$ и почему мы можем разделить на $cos^{2}α$), в результате получим $7-tg^{2}α$=0, откуда $tg^{2}α=7$.

Вычислите:

$$\frac{3cosα-4sinα}{2sinα-5cosα}, если tgα=3.$$

Поскольку $tgα=\frac{sinα}{cosα}$, то целесообразно разделить и числитель и знаменатель (от этого значение выражения не изменится) на $cosα$, в результате получим выражение $\frac{3-4tgα}{2tgα-5}$, остается подставить данное значение и вычислить.

 Можно придерживаться этой классификации при проведении урока, учащимся следует предложить по 2-3 примера от каждой группы, чтобы успеть рассмотреть основные типы заданий, примеры учащиеся могут решать с места (если хорошо воспринимают на слух, что объясняет учитель), поскольку данный урок является уроком повторения; при возникновении затруднений примеры должны быть разобраны на доске (либо учителем, либо кем-то из класса).

 Оставшиеся примеры остаются в качестве домашнего задания, учащиеся их должны прорешать, и обратиться на следующем уроке с возникшими вопросами.

**Урок «Подготовка к ЕГЭ. Решение задач №13»**

**Общеобразовательные цели:**

* обобщение имеющихся знаний учащихся по решению тригонометрических уравнений и отбору корней;
* умение решать тригонометрические уравнения из раздела C и выполнять отбор корней.

***Ход основной части урока.***

В начале урока учащиеся задают вопросы по домашней работе, при необходимости некоторые примеры разбираются на доске (либо учителем, либо учащимися, которые справились с заданием).

Затем можно приступить к повторению решения тригонометрических уравнений:

учащиеся вспоминают формулы для записи решений простейших уравнений (записывают их на доске), основные приемы решения уравнений.

Взяв в качестве критерия прием решения тригонометрических уравнений, можно выделить несколько групп наиболее часто встречающихся уравнений в разделе C:

1. Уравнения, приводимые к алгебраическим:

$$2sin^{2}x+3cosx-3=0;$$

$$2cos^{2}x+\left(2-\sqrt{2}\right)sinx+\left(\sqrt{2}-2\right)=0;$$

$$\frac{1}{cos^{2}x}+4tgx-6=0;$$

$$cos2x-cosx=0;$$

*…*

1. Однородные уравнения второй степени:

$$2sin^{2}x-7sinxcosx+5cos^{2}x=0;$$

…

1. Уравнения, решаемые вынесением общего множителя за скобки:

$$3sin2x-4cosx+3sinx-2=0;$$

$$sin2x-2\sqrt{3} sin^{2}x+4cosx-4\sqrt{3}sinx=0;$$

…

1. Уравнения, представляющие собой произведения нескольких множителей:

$$\left(4cos^{2}x+4cosx-5\right)\sqrt{5sinx}=0;$$

$$\left(2sin^{2}x-cosx-2\right)log\_{sinx}x^{2}=0;$$

*…*

(произведение равно 0, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другой при этом не теряет смысл)

1. Уравнения, содержащие дробно-рациональные выражения:

$$\frac{sin2x-\sqrt{2}cosx+\sqrt{2}sinx-1 }{lg⁡(tgx+2)}=0 ;…$$

 Учащимся можно показать презентацию, в которой для каждого типа уравнений будет использован отдельный слайд. Учитель показывает слайд и обращается к классу с вопросом, какой прием может быть использован для решения того или иного уравнения. При рассмотрении однородных уравнений учащимся следует задать вопрос, почему можно поделить уравнение на $cos^{2}x$ ($sin^{2}x)$, при рассмотрении уравнений под номером 4 учащихся необходимо спросить, при каких условиях произведение обращается в 0 (*когда хотя бы один из множителей равен 0, а другой при этом не теряет смысл*).

 Целесообразно учащимся дать совет: 1) если можно привести к одному аргументу, то приводи; 2) если можно привести к одной функции, приводи.

В задачах C1 требуется не только правильное решение тригонометрического уравнения, но и отбор корней, и это требование предъявляется 3 способами:

1. задан определенный промежуток, которому должны принадлежать корни уравнения;
2. в качестве требования выступает простейшее тригонометрическое неравенство, которому должны удовлетворять корни тригонометрического уравнения (таким образом, задан промежуток в неявном виде; в данном случае необходимо решить простейшее тригонометрическое неравенство);
3. в качестве требования выступает ОДЗ, которую учащиеся должны определить (при решении такого типа уравнений учащиеся часто забывают про ОДЗ, поэтому важно акцентировать их внимание на тот факт, что в любом уравнении из раздела C требуется выполнить отбор корней).

Можно обратить внимание учащихся на предыдущие 3 пункта, от них требуется знание решений простейших тригонометрических неравенств (учитель может вызвать одновременно несколько человек записать решение неравенств $sinx>0, sinx<0, cosx>0, cosx<0,…)$, умение определять область допустимых значений.

Важно обсудить, в каких случаях возникает необходимость нахождения ОДЗ:

* уравнение содержит корень четной степени (подкоренное выражение должно быть $\geq 0)$;
* уравнение содержит $log\_{a}b$, $a>0, a\ne 1,b>0$;
* уравнение содержит дробно-рациональное выражение;
* уравнение содержит тангенс (котангенс).

Также важно обсудить 3 способа отбора корней при решении какого-либо уравнения:

1. по промежутку, отмеченному на числовой окружности;
2. путем перебора целых значений $n$ в общем решении уравнения, получая при этом частные решения;
3. путем решения неравенства (заключаем общее решение уравнения в заданные пределы), из которого находим целые значения $n$, при которых корни уравнения принадлежат заданному промежутку.

Таким образом, учащиеся могут выбрать для себя наиболее удобный способ отбора корней.

Кроме того, можно предложить учащимся решения простейших тригонометрических уравнений записывать совокупностью 2-х серий решений (для удобства отбора корней):

$$sinx=a\left(-1<a<1\right):$$

$x=\left[\begin{array}{c}arcsina+2πn,\\π-arcsina+2πn, \end{array}\right.nϵZ$;

$cosx=a (-1<a<1)$:

$x=\left[\begin{array}{c}arccosa+2πn,\\-arccosa+2πn, \end{array}\right.nϵZ$;

$tgx=a, aϵR$:

$x=\left[\begin{array}{c}arctga+2πn,\\π+arctga+2πn, \end{array}\right.nϵZ$;

$ctgx=a, aϵR$:

$x=\left[\begin{array}{c}arcctga+2πn,\\π+arcctga+2πn, \end{array}\right.nϵZ$.

После того как важные моменты будут обговорены, учащимся будут предложены для решения уравнения:

$3sin2x-4cosx+3sinx-2=0, \left[\frac{π}{2};\frac{3π}{2}\right]$*;*

$2sin^{2}x+3cosx-3=0, \left[4π;5π\right]$*;*

$2sin^{2}x-7sinxcosx+5cos^{2}x=0,\left[-2π;-\frac{π}{2}\right] $*;*

$cos2x-cosx=0, sinx\geq 0$*;*

$\frac{1}{cos^{2}x}+4tgx-6=0,\left[2π;\frac{7π}{2}\right]$*;*

$$\left(4cos^{2}x+4cosx-5\right)\sqrt{5sinx}=0;$$

$$\left(2sin^{2}x-cosx-2\right)log\_{sinx}x^{2}=0;$$

$$\frac{sin2x-\sqrt{2}cosx+\sqrt{2}sinx-1 }{lg⁡(tgx+2)}=0.$$

Те уравнения, которые учащиеся решить не успели, остаются в качестве домашнего задания. На следующем уроке учащиеся обращаются с вопросами (при необходимости некоторые уравнения разбираются на доске) и затем продолжают решать тригонометрические уравнения с последующим отбором корней (можно выборочно вызывать к доске решать на оценку).